



高等数学（I）II 作业

2022-2023 学年第二学期

姓名：万宗金

学号：2022162042

专业：水利水电工程

班级：水工2班

任课教师：张颢

作业成绩：_____

作业 1

一、单选题

1. 已知点 $P(1, 4, 0)$, $Q(-1, 1, 2)$, 则向量 $\overrightarrow{PQ}$ 在 x 轴的分量为 (B).

- A. $2i$ B. $-2i$ C. $-3j$ D. $2k$

2. 已知两点 $A(3, 1, 6)$, $B(6, 2, 4)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 反向的单位向量为 (C).

- A. $\frac{1}{\sqrt{13}}(3, -1, -2)$ B. $\frac{1}{\sqrt{13}}(3, 1, -2)$ C. $\frac{1}{\sqrt{14}}(-3, -1, 2)$ D. $\frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 1, 3)$

3. 设 $b = 3i + 2\sqrt{2}j - k$, 则它的模为 (D).

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$

4. 向量 $\overrightarrow{AM} = (2, 1, 0)$ 和 $\overrightarrow{MB} = (0, 0, 3)$ 的夹角为 (B).

- A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$

5. 设 $c = (b \times a) - 3b$, 则必有 (C).

- A. a 垂直于 $b + c$ B. a 平行于 $b + c$ C. b 垂直于 $3b + c$ D. b 平行于 $3b + c$

二、判断题

1. 向量 $a = 2i - j + k$ 在 x 轴的分量是 2. (B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 向量 $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1)$ 是与向量 $(-5, -2, -4)$ 垂直的 单位向量. (A)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

3. 已知 $a = (0, \frac{1}{e}, 1)$, $b = (1, 1, 1)$, 则 $a \perp b$. (B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

4. 已知两个向量 a 和 b 平行, 则 $a \times b$ 一定不等于零向量. (B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

作业 2

一、单选题

1. 过点 $(2, 3, 0)$ 且与平面 $2x - y + z - 12 = 0$ 平行的平面方程为 (C).

- A. $x - 7y + z + 12 = 0$ B. $2x - y + z - 12 = 0$ C. $2x - y + z - 1 = 0$ D. $6x - 3y + 5z - 1 = 0$

2. 过点 $(1, 1, 2)$ 且平行于 $\vec{a} = \{0, 2, 1\}$ 和 $\vec{b} = \{3, 1, 1\}$ 的平面方程为 (D) $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = i + 3j - 6k$

- A. $2x + y - 5z - 1 = 0$ B. $7x + 5y - 3z + 2 = 0$ C. $x + y - z + 7 = 0$ D. $x + 3y - 6z + 8 = 0$

3. 经过点 $M_1(-3, 2, -4)$ 和 $M_2(-1, 2, -3)$ 的直线方程为 (C). $\vec{M_1M_2} = (2, 0, 1)$ 点向式

- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{0}$ B. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{0}$ C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{1}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{1}$

4. 经过点 $(-1, -2, 4)$ 并且与已知平面 $x + y + z - 3 = 0$ 和 $2x + y - z + 5 = 0$ 都平行的直线方程为 (D).

- A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-3}$ B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-4}{1}$ C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-3}$ D. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-1}$

5. 已知直线的对称式方程为 $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}$, 则该直线的参数方程为 (B).

- A. $\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

二、判断题

1. 过三点 $M_1(1, 1, 1)$ 、 $M_2(-3, 2, 1)$ 和 $M_3(4, 3, 2)$ 的平面的方程为 $x + 4y - 11z + 6 = 0$. (A.)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 空间直线 $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}$ 和 $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-4}$ 的位置关系互相平行. (A.)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

$(1, -1, 2)$ $(-2, 2, -4)$

作业 3

一、单选题

$$y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$$

1. 平面曲线 $y = 2z$ 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 (C).

- A. $y = 2(x^2 + z^2)$ B. $y = 4(x^2 + z^2)$ C. $y^2 = 4(x^2 + z^2)$ D. $y^2 = 2(x^2 + z^2)$

2. 平面曲线 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 (A).

- A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2 + z^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2 + z^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2 + z^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2 + z^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

3. 曲面 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 可以由 (D).

~~A.~~ 平面曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周生成

~~B.~~ 平面曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周生成

C. 平面曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周生成

D. 平面曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周生成

~~A.~~ 在空间直角坐标系中方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 表示 (AC).

- A. 双曲线 B. 双曲抛物面 C. 双曲柱面 D. 双叶双曲面

二、判断题

1. 曲面 $z^2 = 4x^2 + y^2$ 可以由平面曲线 $z^2 = 4x^2$ 绕 z 轴旋转一周生成. (B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

~~2.~~ 方程 $\frac{x^2 + y^2}{4} - z^2 = 1$ 表示旋转双叶双曲面. (B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

~~3.~~ 在空间直角坐标中, 方程 $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 9$ 表示的曲面为椭球面. (A)

- A. $\checkmark$ B. $\times$



作业4

一、单选题

1. 设二元函数 $z = \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}-1}}$, 则它的定义域为 (A).

$$\begin{cases} 2-e^{xy} - 1 \neq 0 \\ 2-e^{xy} \geq 0 \end{cases}$$

A. $\{(x,y) | xy \leq \ln 2 \text{ 且 } xy \neq 0\}$ B. $\{(x,y) | xy < \ln 2 \text{ 且 } xy \neq 0\}$

C. $\{(x,y) | xy \leq \ln 2\}$ D. $\{(x,y) | xy \leq \ln 2\}$

2. 设二元函数 $f(x,y) = \arcsin \frac{\sqrt{4-y}}{2}$, 则 $f(4,2) = (C)$.

A. 0 B. 1 C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{\cos y - x}{xy} = (C)$.

A. 0 B. $\frac{2}{\pi}$ C. $-\frac{2}{\pi}$ D. 不存在

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(e^{x^2+y^2}-1)}{(x^2+y^2)} = (D)$.

A. 2 B. 4 C. $\frac{1}{2}$ D. -1

二、判断题

1. 已知二元函数 $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y-x}}$, 则它的定义域为 $\{(x,y) | x+y > 0 \text{ 且 } x-y \leq 0\}$. (X)

A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 已知 $f(x,y) = (1+xy)^{\frac{2}{xy}}$, 则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ 不存在. (X)

A. $\checkmark$ B. $\times$

$$\frac{(e^{x^2+y^2}-1) \cdot (e^{x^2+y^2}+1)}{(x^2+y^2) \cdot (e^{x^2+y^2}+1)}$$

$$(1+t)^{\frac{2}{t}}$$

作业 5

一、单选题

1. 已知 $f(x, y) = e^{-x} \cdot \sin(x + 2y)$, 则 $f'_x\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = (D)$.

- A. $\sqrt{2}$ B. 0 C. 1 D. -1

2. 已知 $u = x^{\frac{y}{z}}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial z} = (B)$.

- A. $\frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}$ B. $-\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x$ C. $\frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x$ D. $\frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}}$

3. 已知 $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (A)$.

- A. $-16xy$ B. $12x^2 - 16xy$ C. $12y^2 - 16xy$ D. $-16xy^2$

4. 设 $z = (x-1)^y$, 则 $dz = (A)$.

- A. $y(x-1)^{y-1} dx + (x-1)^y \ln(x-1) dy$ B. $y(x-1)^{y-1} dx + (x-1)^y dy$
C. $(x-1)^y dx + (x-1)^y \ln(x-1) dy$ D. $y(x-1)^y dx - (x-1)^y \ln(x-1) dy$

5. 设 $u = xy^2 - \sin y + e^z$, 则 $du\Big|_{(-1, \frac{\pi}{2}, 0)} = (B)$.

- A. $\frac{\pi^2}{4} dx + (1-\pi) dy + dz$ B. $\frac{\pi}{2} dx - \pi dy + dz$

- C. $\frac{\pi}{2} dx - \pi dy + \frac{\pi}{2} dz$ D. $\frac{\pi^2}{4} dx - \pi dy + dz$

二、判断题

1. 已知 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处存在偏导数, 则 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处极限一定存在.

(B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 已知 $z = \sqrt[5]{x} + x^2y + 1$, 则 $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0$. (A)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

4. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在, 则 $f(x, y)$ 在该点可微分. (B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

$$f'_x = -e^{-x} \cdot \sin(x+2y) - e^{-x} \sin(x+2y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^3 - 8x^2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$= y^2 dx + (2xy - \cos y) dy + e^z dz$$

作业 6

一、单选题

1. 设 $u = f(x, xy, xyz)$, 则 $\frac{\partial u}{\partial z} = (C)$.

- A. xf'_3 B. yf'_3 C. xyf'_3 D. $xyzf'_3$

2. 设 $z = u^2 + v^2$, $u = x + y$, $v = xy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = (C)$.

- A. $2(x+y)$ B. $2(x-y)$ C. $2(x+y+xy^2)$ D. $4y$

3. 设 $z = f(u, v, y)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 其中 f, u, v 均可微, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = (B)$.

- A. $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$ B. $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}$ C. $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}$ D. $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$

4. 设 $z = f(x^2 + y^2)$, f 具有二阶导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (C)$.

- A. $2xyf''$ B. $2f' + 4x^2f''$ C. $4xyf''$ D. $2f' + 4yf''$

5. 设 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx} = (B)$.

- A. $\frac{x-y}{x+y}$ B. $\frac{x+y}{x-y}$ C. $\frac{2x-2y}{x+y}$ D. $\frac{x-y}{2x+2y}$

6. 设 $x^2y - 2y^2z^3 = 1$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = (A)$.

- A. $\frac{x^2 - 4yz^3}{6y^2z^2}$ B. $-\frac{x^2 - 4yz^3}{6y^2z^2}$ C. $\frac{x}{3yz^2}$ D. $-\frac{x}{3yz^2}$

二、判断题

1. 设 $z = f(x, y)$, 而 $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, 则 $\frac{dz}{dt} = f'_x \cdot \phi' + f'_y \cdot \psi'$. (A)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 设 $e^y - \frac{1}{2}x^2 + 4y = 2x$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{4+y}{e^y+2}$. (B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

三、计算题

1. 设 $x + \ln y - z^2 = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$= -\frac{1}{2z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{4z^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

$$= \frac{1}{2zy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1 + 2z^2}{4y^2 z^3}$$

2. 设 $x + y^2 - z^2 + 4x^2 = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$= -\frac{8x+1}{2z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(8x+1)' \cdot 2z - 2(8x+1) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{(2z)^2}$$

$$= \frac{16z^2 - (8x+1)^2}{2z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

$$= \frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{z - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}$$

$$= \frac{z^2 - y^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{2z}$$

$$= -\frac{1}{4z^3}$$

$$\frac{1}{2zy}$$

$$= \frac{1 + 2z^2}{4y^2 z^3}$$

作业7

一、单选题

1. 空间曲线 $x=t, y=2\sqrt{t}, z=4-t^2$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的切线方程为 (A).

依次求导 $x' \ y' \ z'$ $T=(1, 1, -2)$

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-2}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{2}$

2. 空间曲线 $x=t-2, y=2t^2, z=4t^3$ 在点 $(-1, 2, 4)$ 处的法平面方程为 (D).

$T=(1, 4, 12)$

A. $x+4y+12z-56=0$ B. $x+4y+12z+55=0$ C. $x+4y-12z-55=0$ D. $x+4y+12z-55=0$

$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{12}$
 $(x+1) + 4(y-2) + 12(z-4) = 0$

3. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 处的切平面方程为 (C).

A. $4x-2y+z-6=0$ B. $4x-2y+z-8=0$ C. $4x+2y-z-6=0$ D. $4x+2y-z-8=0$

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 - z$
 $\vec{n} = (2x, 2y, -1)$
 $\vec{n}|_{(2, 1, 4)} = (4, 2, -1)$
 $4(x-2) + 2(y-1) - (z-4) = 0$

4. 曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为 (A).

A. $ax_0x+by_0y+cz_0z=1$ B. $2x+2y-z=x_0+y_0+z_0$ C. $ax_0x+by_0y+cz_0z=5$ D. $x_0x+b_0y+z_0z=1$

5. 曲面 $2x^2+y^2+3z^2=1$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的法线方程为 (C).

$\vec{n} = (4x, 2y, 6z)$
 $\vec{n}|_{(1, 1, 1)} = (4, 2, 6)$
 $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{6}$

二、判断题

1. 空间曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在 $(1, 1, 1)$ 处的法平面与平面 $x+2y+3z+26=0$ 平行. (~~A~~)

A. $\checkmark$ B. $\times$ $1, 2t, 3t^2$ $T=(1, 2, 3)$ $x+2y+3z-6=0$

2. 空间曲线 $x=2\ln(t+1), y=t^2, z=\frac{1}{2}t^2$ 在 $t=1$ 点处的一个切向量为 $T=(2, 2, 1)$. (B)

A. $\checkmark$ B. $\times$ $\frac{2}{t+1}, 2t, t$ $(1, 2, 1)$

3. 曲面 $3x^2-y^2-2z^2=1$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的法线与直线 $\frac{x+3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{-2}$ 平行. (A)

A. $\checkmark$ B. $\times$

$\vec{n} = (6x, -2y, -4z)$

$\vec{n}|_{(1, -2, 1)} = (6, 4, -4)$

$\frac{x+3}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-4}$

$\frac{x+3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{-2}$

作业 8

一、单选题

1. 已知 $f(x, y, z) = 2x^2 - y - 3z$, 则它在点 $(1, 1, 1)$ 处沿方向 l 的方向导数为 (A), 其方向角分别为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$$

A. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

2. 已知 $f(x, y, z) = x + \sin y + z$, 则它在点 $(1, \frac{\pi}{2}, 1)$ 处沿方向 l 的方向导数为 (B), 其方向角分别为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

$$-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

3. 已知 $z = e^y \cos x$, 则 $\text{grad } z(\frac{\pi}{2}, 0) =$ (C).

A. $(0, -1)$

B. $(1, 0)$

C. $(-1, 0)$

D. $(2, 1)$

4. 已知 $u = z^3 + 3xyz + 1$, 则 $\text{grad } u(-2, 1, 1) =$ (D).

A. $(-3, -6, 3)$

B. $(-3, -6, -3)$

C. $(3, -6, -3)$

D. $(3, -6, 3)$

二、判断题

1. $f(x, y, z) = \arctan x + \sin y + z$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}, 4)$ 点沿方向 l 的方向导数, 其方向角分别为 $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, 则

方向导数为 0. (B)

A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 设 $z = y \ln x$, 则 $\text{grad } z(e, 1) = \bar{j}$. (B)

A. $\checkmark$

B. $\times$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x}$$

$$(\frac{1}{e}, 0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$$

作业 9

一、计算题

1. 求函数 $f(x, y) = x^2 - y^2 + x^3 + y - x$ 的极值点和极值.

$$\begin{cases} f_x = 2x + 3x^2 - 1 = 0 \\ f_y = -2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点 } (-1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$$

$f_{xx}(x, y) = 6x + 2$ 考虑点 $(-1, \frac{1}{2})$.

$$A = -4, B = 0, C = -2$$

$$f_{xy}(x, y) = 0$$

$$AC - B^2 = 8 > 0$$

$$f_{yy}(x, y) = -2$$

$\because A < 0, \therefore (-1, \frac{1}{2})$ 是极大值点, 极大值 $= \frac{5}{4}$

考虑点 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$$A = 4, B = 0, C = -2$$

$AC - B^2 = -8 < 0, \therefore (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 不是极值点

2. 求函数 $f(x, y) = y^3 + x^3 - 4x^2 - 4y^2 + 4(x + y)$ 的极值点和极值.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \\ f_y = 3y^2 - 8y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点 } (2, 2), (2, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, 2), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 8 = 0$$

考虑点 $(2, 2)$.

$$f_{xy}(x, y) = 0$$

$$A = 4, B = 0, C = 4$$

$$AC - B^2 = 16 > 0$$

$$\because A > 0$$

$\therefore (2, 2)$ 是极小值点, 极小值 $= 0$

考虑点 $(2, \frac{2}{3})$

$$A = 4, B = 0, C = -4$$

$$AC - B^2 = -16 < 0$$

$\therefore (2, \frac{2}{3})$ 不是极值点.

考虑点 $(\frac{2}{3}, 2)$.

$$A = -4, B = 0, C = 4$$

$$AC - B^2 = -16 < 0$$

$\therefore (\frac{2}{3}, 2)$ 不是极值点.

考虑点 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

$$A = -4, B = 0, C = -4$$

$AC - B^2 = 16 > 0, \because A < 0, \therefore (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ 是极大值点, 极大值 $= \frac{2}{27}$

二、应用题

1. 在平面 $3x-2z=0$ 上求一点, 使它与点 $A(1,1,1)$ 和 $B(2,3,4)$ 的距离的平方和最小.

设所求的点 (x, y, z)

$$F(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 + \lambda(3x-2z)$$

$$\begin{cases} f_x = 2(x-1) + 2(x-2) + 3\lambda = 0 \\ f_y = 2(y-1) + 2(y-3) = 0 \\ f_z = 2(z-1) + 2(z-4) - 2\lambda = 0 \\ f_\lambda = 3x - 2z = 0 \end{cases}$$

解得: 极值点为 $(x, y, z) = (\frac{2}{13}, 2, \frac{63}{26})$

2. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

设球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$
长 x , 宽 y , 高 z

$$V = x \cdot y \cdot z$$

$$F(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2)$$

$$f_x = yz + 2\lambda x = 0$$

解得 $x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$$f_y = xz + 2\lambda y = 0$$

$y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$$f_z = xy + 2\lambda z = 0$$

$z = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$$f_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0$$

$x = y = z = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

3. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 求周长最大的直角三角形.

设两直角边分别为 x, y

$$s = x + y + l \quad (0 < x < l, 0 < y < l)$$

$$x^2 + y^2 = l^2$$

$$F(x, y, z) = x + y + l + \lambda(x^2 + y^2 - l^2)$$

$$f_x = 1 + 2\lambda x = 0$$

$$f_y = 1 + 2\lambda y = 0$$

$$f_\lambda = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

解得 $x = y = \frac{l}{\sqrt{2}}$

4. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 p_1 和 p_2 , 销售量分别为 q_1 和 q_2 , 需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1, \quad q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2).$$

试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 能使其获得的总利润最大? 最大的总利润为多少?

$$\text{总收入 } R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 24p_1 - 0.2p_1^2 + 10p_2 - 0.05p_2^2$$

$$\text{总利润 } L = R - C = 32p_1 - 0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 12p_2 - 1375$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p_1} = 32 - 0.4p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial p_2} = 12 - 0.1p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 80 \\ p_2 = 120 \end{cases}$$

当 $p_1 = 80, p_2 = 120$ 时 L 最大.

$$L = 605$$

5. 求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

$$\text{交线为 } \lambda(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1) \text{ 和 } \mu(x^2 + y^2 - 1)$$

$$L = z^2 + \lambda(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1) + \mu(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = \frac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0 \\ L_y = \frac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0 \\ L_z = \frac{\lambda}{5} = 0 \\ L_\lambda = \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1 \\ L_\mu = x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{35}{12} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \\ z = \frac{35}{12} \end{cases}$$

由题意得最短的点为 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{35}{12})$

4. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 p_1 和 p_2 , 销售量分别为 q_1 和 q_2 , 需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1, \quad q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2).$$

试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 能使其获得的总利润最大? 最大的总利润为多少?

$$\text{总收入 } R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 24p_1 - 0.2p_1^2 + 10p_2 - 0.05p_2^2$$

$$\text{总利润 } L = R - C = 32p_1 - 0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 12p_2 - 1375$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p_1} = 32 - 0.4p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial p_2} = 12 - 0.1p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 80 \\ p_2 = 120 \end{cases}$$

当 $p_1 = 80, p_2 = 120$ 时 L 最大.

$$L = 605$$

5. 求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

$$\text{交线为 } \lambda(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1) \text{ 和 } \mu(x^2 + y^2 - 1)$$

$$L = z^2 + \lambda(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1) + \mu(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = \frac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0 \\ L_y = \frac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0 \\ L_z = \frac{\lambda}{5} = 0 \\ L_\lambda = \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1 \\ L_\mu = x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{35}{12} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \\ z = \frac{35}{12} \end{cases}$$

由题意得最短的点为 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{35}{12})$

作业 10

一、单选题

1. 设 $I_1 = \iint_D [\ln(x+y)]^7 dx dy$, $I_2 = \iint_D (x+y)^7 dx dy$, $I_3 = \iint_D [\sin(x+y)]^7 dx dy$, 其中 D 由

$x+y=\frac{1}{2}, x+y=1, x=0, y=0$ 围成, 则它们的关系是 (C).

- A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_3 < I_2 < I_1$ C. $I_1 < I_3 < I_2$ D. $I_3 < I_1 < I_2$

2. $\iint_D \frac{1}{2} dx dy = (C)$, 其中 D 是由 $y=x, y=x-4, y=1, y=4$ 所围成的平面区域.

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 12

3. 设区域 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 5\}$, 则积分 $I = \iint_D (2x - y + 1) dx dy$ (D).

- A. $-2 \leq I \leq 10$ B. $1 \leq I \leq 8$ C. $-6 \leq I \leq 8$ D. $-36 \leq I \leq 6$

二、判断题

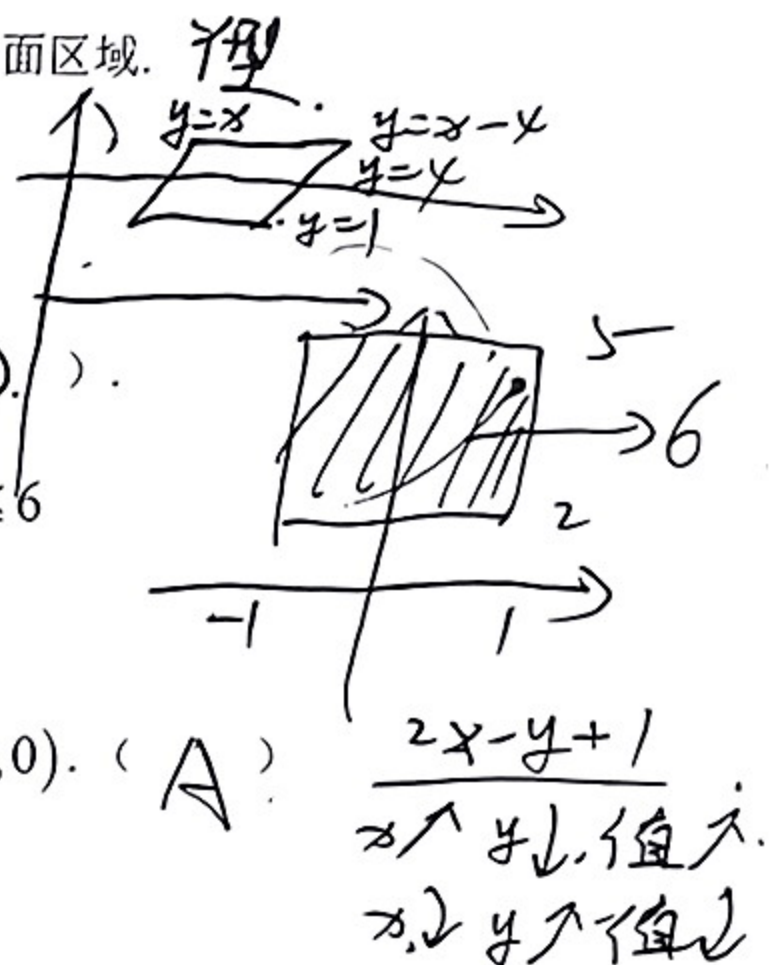
1. 设 $f(x, y)$ 在 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$ 上连续, 则 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \iint_D f(x, y) d\sigma$ 存在且等于 $\pi f(0, 0)$. (A)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 设区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2}\}$,

$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, 1-2y \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$. (A)

- A. $\checkmark$ B. $\times$



作业 11

一、单选题

1. 设 D 是由 $y = x^2, x + y = 6$ 所围成的平面区域, 则 $\iint_D (x+1) d\sigma = (A)$.

A. $\int_{-3}^2 dx \int_{x^2}^{6-x} (x+1) dy$ B. $\int_{-3}^2 dx \int_{6-x}^{x^2} (x+1) dy$ C. $\int_{-2}^3 dx \int_{x^2}^{6-x} (x+1) dy$ D. $\int_{-2}^3 dx \int_{6-x}^{x^2} (x+1) dy$

2. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy = (B)$.

A. $\int_{-1}^2 dy \int_{y+2}^{y^2} f(x, y) dx$ B. $\int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx$ C. $\int_{-1}^2 dy \int_{y-2}^{y^2} f(x, y) dx$ D. $\int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y-2} f(x, y) dx$

3. $\iint_D f(x^2 + y^2) d\sigma$ 在极坐标系下的二次积分的形式为 (D), 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq 1$.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(\rho^2) \rho d\rho$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 f(\rho^2) \rho d\rho$ C. $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho^2) \rho d\rho$ D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho^2) \rho d\rho$

4. $\int_0^1 dy \int_0^y \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx = (C)$.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\cos\theta}^1 \frac{1}{\rho} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\cos\theta}^1 \frac{1}{\rho} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sin\theta}^1 \frac{1}{\rho} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho$

D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sin\theta}^1 \frac{1}{\rho} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$

二、判断题

1. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则有 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^1 f(x, y) dx$. (A)

A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 区域 $x^2 + y^2 \leq 4y$, 用极坐标表示为: $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$. (B)

A. $\checkmark$ B. $\times$

三、计算题

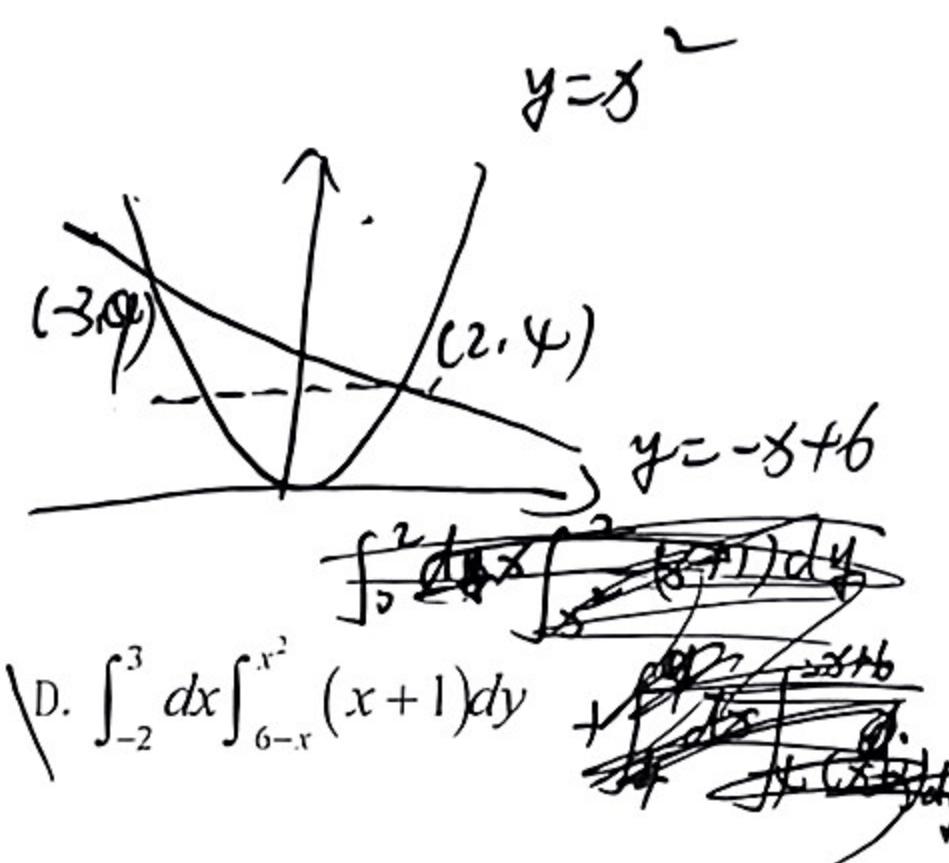
1. 计算 $\iint_D (2e^x + \sin x) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

$$\iint_D (2e^x + \sin x) d\sigma = 2 \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 e^x dx \right] dy = 2 \int_{-1}^1 [e^x]_{-1}^1 dy = 2 \int_{-1}^1 (e - e^{-1}) dy = 4(e - e^{-1}).$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 e^x dx \right] dy$$

$$= 2 \int_{-1}^1 (e - e^{-1}) dy$$

$$= 4(e - e^{-1})$$



2. 计算 $\iint_D (3y^2+1) d\sigma$, 其中 D 是由 x 轴、 $x+y=1$ 及 $y-x=1$ 围成的平面闭区域.

$$\begin{aligned} \iint_D (3y^2+1) d\sigma &= \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} (3y^2+1) dx \\ &= \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} (3y^2+1) dx \\ &= \int_0^1 dy [3y^2x + x]_{y-1}^{1-y} \\ &= \int_0^1 dy [3y^2(1-y) + (1-y) - 3y^2(y-1) - (y-1)] \\ &= \int_0^1 dy [3y^2 - 3y^3 + 1 - y - 3y^3 + 3y^2 - y + 1] \\ &= \int_0^1 dy [6y^2 - 6y^3 - 2y + 2] \\ &= [2y^3 - \frac{3}{2}y^4 - y^2 + 2y]_0^1 \\ &= 2 - \frac{3}{2} - 1 + 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3. 计算 $\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2} dx dy$, 其中 $D: x^2+y^2 \leq 2ax (a>0), y \geq 0$.

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho \rightarrow \frac{1}{2} d(4a^2 - \rho^2) \cdot \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{4} (4a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2a \cos \theta} \\ = \frac{1}{4} (4a^2 - 4a^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \\ = \frac{1}{4} (4a^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \\ = \frac{1}{4} (2a \sin \theta)^3 \\ = \frac{1}{2} a^3 \sin^3 \theta \end{aligned}$$

4. 计算 $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0, y=x$ 所围成的第一象限内的闭区域.

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 1 \leq \rho \leq 2 \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \arctan \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} \rho d\rho \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \arctan \theta \rho d\rho \\ = \frac{3\pi}{64} \end{aligned}$$

5. 计算 $\iint_D x^2 d\sigma$, $D: \{(x,y) | a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$.

$$\begin{aligned} a \leq \rho \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho^2 \cos^2 \theta \rho d\rho \\ = \frac{\pi}{4} (b^4 - a^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta d\theta \\ = \frac{1}{2} (\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) \\ \sin^2 \theta d\theta \\ = \frac{1}{2} (\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta) \end{aligned}$$

作业 12

一、单选题

1. 积分区域 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 1$ 所围成的闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = (C)$.

A. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$

B. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz$

☒ C. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz$

~~D. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz$~~

2. 积分区域 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = (C)$.

A. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz$

B. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz$

☒ C. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz$

D. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz$

二、判断题

1. 柱面坐标系中的体积元素是 $dv = d\theta d\rho dz$. (B)

A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 已知函数 $f(x, y, z)$, 积分区域为 $\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, c_1 \leq z \leq c_2\}$,

则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$. (A)

A. $\checkmark$ B. $\times$

三、计算题

1. 计算 $\iiint_{\Omega} 2xyz dv$, 其中 Ω 由曲面 $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$ 与三个平面 $z = 0, y = x, y = 0$ 所围成第一卦限内区域.

$$\int_0^2 x dx \int_0^x y dy \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} 2z dz = \frac{4}{3}$$

2. $\iiint_{\Omega} 3z dv$, 其中 Ω 是 $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的闭区域.

$$6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 4$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} 3z dz$$

$$= 92\pi$$

作业 13

应用题

1. 求由平面 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体体积。

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (6-x^2-y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{17}{3} - 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 \right) dx \\
 &= \frac{17}{6}
 \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 1$
 $0 \leq y \leq 1-x$

2. 求曲面 $x^2+y^2=4x, z=x^2+y^2$ 与平面 $z=0$ 所围成立体的体积。

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (x^2+y^2) dx dy \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{4\cos\theta} \rho^3 d\rho \\
 &= 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\
 &= 24\pi
 \end{aligned}$$

$D: x^2+y^2 \leq 4x$
 $\rho^2 \leq 4\rho \cos\theta$
 $\rho \leq 4\cos\theta$
 $(x-2)^2+y^2=4$



$$2(x^2+y^2)=6$$

3. 求曲面 $z=2(x^2+y^2)$ 与 $z=6-x^2-y^2$ 所围成立体的体积。

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (6-x^2-y^2) dx dy - \iint_D 2(x^2+y^2) dx dy \\
 &= 3 \iint_D (2-x^2-y^2) dx dy \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2-\rho^2) \rho d\rho \\
 &= 6\pi
 \end{aligned}$$

$x^2+y^2 \leq 2$



$$\iint_D dx dy$$

作业 14

一、单选题

1. 已知一根铁丝的方程为 $y = x$, $0 \leq x \leq 1$, 其线密度 $\mu = 4x$, 则它的质量为 (C).

- A. $\int_L \sqrt{4x} ds$ B. $\int_L (4x)^2 ds$ C. $4\sqrt{2} \int_0^1 x dx$ D. $4 \int_0^1 x dx$

2. 已知 L 为曲线 $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$, 则 $\int_L y ds =$ (B).

- A. $\int_0^\pi R \cos t \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt$ B. $\int_0^\pi R \sin t \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt$
 C. $\int_0^{2\pi} R \sin t \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt$ D. $\int_0^\pi R \sin t dt$

3. 已知 Γ 为曲线 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ 上 $0 \leq t \leq 2$ 的一段弧, 则 $\int_\Gamma y^2 ds =$ (B).

- A. $\int_0^2 (e^t \cos t)^2 \sqrt{(e^t \sin t)^2 + (e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt$
 B. $\int_0^2 (e^t \sin t)^2 \sqrt{(e^t \sin t)^2 + (e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt$
 C. $\int_0^2 e^{2t} \sqrt{(e^t \sin t)^2 + (e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt$
 D. $\int_0^2 \sqrt{(e^t \sin t)^2 + (e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt$

4. 设 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧, 则曲线积分 $\int_L (x^2 - 3y) dy =$ (D).

- A. $\frac{1}{15}$ B. $\frac{1}{16}$ C. $-\frac{16}{3}$ D. -16

5. $\int_L x dy - y dx =$ (D), 其中 L 为圆周 $x = R \cos t, y = R \sin t$ 上对应 t 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 0 的一段弧.

- A. 0 B. πR^2 C. $\frac{\pi}{2} R^2$ D. $-\frac{\pi}{2} R^2$

6. $\int_\Gamma y dx + dy - z^2 dz =$ (D), 其中 Γ 为曲线 $x = 2t - 3, y = t^2, z = \frac{1}{t}$ 上对应 t 从 1 到 2 的一段弧.

- A. $\int_1^2 \left(t^2 + 1 - \frac{1}{t^2} \right) dt$ B. $\int_1^2 (2t^3 + 2t - 1) dt$ C. $\int_1^2 \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$ D. $\int_1^2 \left(2t^2 + 2t + \frac{1}{t^4} \right) dt$

二、判断题

1. 已知 L 是以 $(0,0)$ 、 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 为顶点的三角形的整个边界曲线, 则 $\int_L 2 ds = 4 + 2\sqrt{2}$. (A)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 已知 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在平面曲线 L 上连续, 且 $f(x,y) \leq g(x,y)$, 则一定有

$$\int_L f(x,y) ds \leq \int_L g(x,y) ds. \quad (A)$$

- A. $\checkmark$ B. $\times$

作业 15

证明题

$$\oint_L Pdx - Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



1. 证明积分 $\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 在 xOy 面的第一象限内与路径无关, 并计算积分值.

$$\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$x^2$$

$$= \int_1^2 0 dx + \int_0^2 \frac{2}{4 + y^2} dy$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

2. 证明积分 $\int_{(0,0)}^{(2,1)} (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + e^y)dy$ 在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值.

$$Q = 3x^2y + 8xy^2 + e^y$$

$$P = (3x^2y + 8xy^2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 16xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 16xy$$

$$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + e^y)dy$$

$$= \int_0^2 0 dx + \int_0^1 (8 + 32y + e^y) dy$$

$$= 23 + e$$

3. 证明积分 $\int_{(1,0)}^{(3,1)} (2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy$ 在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值.

$$Q = 2y \sin x - x^2 \sin y$$

$$P = 2x \cos y + y^2 \cos x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \cos x - 2x \sin y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos x - 2x \sin y$$

$$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\int_{(1,0)}^{(3,1)} (2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy$$

$$= \int_1^3 2y dx + \int_0^1 (2y \sin 3 + 9 \sin y) dy$$

$$= \sin 3 + 9 \cos 1 - 1$$

重积分的应用

曲面面积 $\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$



作业 16

一、单选题

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds = \iint_D f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy$$

1. 曲面型构件占有空间曲面 Σ 为平面 $x + 2y + z = 1$ 被坐标面截得部分，它的面密度为 $\mu = x^2 + y^2 + z^2$ ，则构件质量的表达式正确的是 (B)。

$z = 1 - x - 2y$
 $\sqrt{1 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

A. $\int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} [x^2 + y^2 + (1-x-2y)^2] dy$

B. $\sqrt{6} \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} [x^2 + y^2 + (1-x-2y)^2] dy$

C. $\sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} [x^2 + y^2 + (1-x-2y)^2] dy$

D. $\sqrt{6} \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} [x^2 + y^2 + (1-x-2y)] dy$

2. 曲面型构件占有空间曲面 Σ 为圆锥面 $z = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$)，它的面密度为 $\mu = z$ ，则构件质量的表达式正确的是 (B)。

A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{\sqrt{5}}{2} \rho d\rho$

B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{\sqrt{5}}{4} \rho^2 d\rho$

C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{\sqrt{5}}{4} \rho d\rho$

D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{\sqrt{5}}{2} \rho^2 d\rho$

3. 曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x+z) dS = (A)$ ，其中 Σ 为平面 $x + \frac{y}{2} + z = 1$ 在第一卦限内部分。

A. $\frac{3}{2} \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} \left(1 - \frac{y}{2}\right) dy$

B. $\int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} \left(1 - \frac{y}{2}\right) dy$

C. $\frac{3}{2} \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} dy$

D. $\int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} dy$

4. 曲面 Σ 为 $4z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 $z = 1$ 所截得部分，则 $\iint_{\Sigma} (x+z) dS = (D)$ 。

A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (4\cos\theta + 1) \rho d\rho$

B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (4\cos\theta + 1) \rho^2 d\rho$

C. $\frac{\sqrt{17}}{16} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (4\cos\theta + 1) \rho d\rho$

D. $\frac{\sqrt{17}}{16} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (4\cos\theta + 1) \rho^2 d\rho$

5. 对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma} a^2 dx dy = (B)$ ，其中 Σ 是曲面 $x^2 + y^2 - z = a^2$ 在 xOy 面以下部分，取下侧。

A. πa^4

B. $-\pi a^4$

C. πa^6

D. $-\pi a^6$

6. 曲面积分 $\iint_{\Sigma} \sin y \cos z dx dy = (D)$ ，其中 Σ 是柱面 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 被平面 $z = 0$ 和平面 $z = 2$ 所截的外侧部分。

A. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} \sin y \cos z dy$

B. $-\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} \sin y \cos z dx$

C. $-\int_{-1}^1 \sin y dx \int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} \cos z dy$

D. 0

7. 曲面积分 $\iint_{\Sigma} (9-z) dx dy = (A)$, 其中 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 被平面 $z = 2$ 所截部分的上侧.

A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (8-\rho^2) \rho d\rho$

B. $-\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (8-\rho^2) \rho d\rho$

C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (8-\rho^2) d\rho$

D. $-\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (8-\rho^2) d\rho$

8. 曲面积分 $\oiint_{\Sigma} y(z^2+1) dz dx = (B)$, 其中 Σ 是六面体 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$ 外表面的外侧.

A. 0

B. 24

C. -12

D. 12

二、判断题

1. 当 Σ 在 xOy 平面内的投影区域为 D 时, 则 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y) dx dy$. (B)

A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 当对面积的曲面积分的被积函数为 1 时, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} dS$ 表示曲面 Σ 的面积. (A.)

A. $\checkmark$ B. $\times$

3. 设有向光滑曲面 Σ 法向量的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy =$$

$$\iint_{\Sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS. (A)$$

A. $\checkmark$ B. $\times$

4. 设曲面 $\Sigma: z = 0, (x, y) \in D$, 取下侧, 则 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy = \iint_D f(x, y, 0) dx dy$. (B)

A. $\checkmark$ B. $\times$

5. 有向曲面 Σ 在 xOy 面的投影 $(\Delta S)_{xy} = (\Delta \sigma)_{xy}$, 其中 $(\Delta \sigma)_{xy}$ 是投影区域的面积. (B.)

A. $\checkmark$ B. $\times$

作业 17 $\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$ (与谁对谁)

应用题

1. 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} (x^3 + y^2 z^2) dy dz + (xy + x^2 z - 2x^2 y + z) dz dx + (3y - x^2 z) dx dy$, 其中 Σ

是平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的四面体 Ω 的整个边界曲面的外侧.

$$\begin{aligned} P &= (x^3 + y^2 z^2) & Q &= (xy + x^2 z - 2x^2 y + z) & R &= (3y - x^2 z) \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= 3x^2 & \frac{\partial Q}{\partial y} &= x - 2x^2 & \frac{\partial R}{\partial z} &= -x^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= y + 2xz - 4xy & \frac{\partial R}{\partial y} &= 3 - x^2 & & \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= -2xz & & & & \end{aligned}$$

2. 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体

$x^2 + y^2 \leq 1$ 的整个表面的外侧.

$$P = x^3 \quad Q = y^3 \quad R = z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2 \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 1$$

$$\iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 1) dx dy dz$$

$$= \frac{9}{2} \pi$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3x^2 + 3y^2 + 1) \rho d\rho \int_0^3 dz$$

3. 利用高斯公式计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^3 + y^2 z) dy dz + (x^2 - 2x^2 y) dz dx + (3z - x^2 z + 1) dx dy$, 其中 Σ 为上半球

面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

设 $\Sigma_1: z=0, x^2+y^2 \leq a^2$ 取上侧

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^3+y^2z) dy dz + (x^2-2x^2y) dz dx + (3z-x^2z+1) dx dy = \iint_{\Sigma_1} (x^3+y^2z) dy dz + (x^2-2x^2y) dz dx + (3z-x^2z+1) dx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dx dy$$

$$= 4\pi a^3 + \pi a^2$$

④

4. 利用高斯公式计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + yz) dy dz + (y^2 + x^2 z - xz^2) dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 为圆锥面

$x^2 + y^2 = z^2$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分的下侧.

设 $\Sigma_1: z=2, x^2+y^2 \leq 4$ 取上侧

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz - \iint_{\Sigma_1} z dx dy$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 8\pi$$

$$= -\frac{16}{3}\pi$$

作业 18

一、单选题

1. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}$, 则 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = (D)$.

- A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{12}$

2. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{n\pi}{6}$ (B).

- A. 收敛 B. 发散 C. 条件收敛 D. 无法确定

3. 下列结论中正确的是 (A).

- A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛 B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛

- C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散 D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_n)$ 发散

4. 设常数 $k > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$ (C).

- A. 发散 B. 绝对收敛 C. 条件收敛 D. 收敛和发散与 k 的取值有关

5. 下列级数绝对收敛的是 (B).

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

6. 下列级数中收敛的是 (D).

- A. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$ B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n}{n^2}$ C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{2^n}$ D. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{n!}$

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{a}{n}\right) (a > 0)$, 则级数 (C).

- A. 发散 B. 条件收敛 C. 绝对收敛 D. 收敛性与 a 有关

8. 下列级数中发散的是 (C).

- A. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2-1}$ B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n}{1+n^3}$ C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n \cdot 3^n}$ D. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

二、判断题

1. 如果加括号后所成级数发散, 那么原来的级数也发散. (A) A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 在级数中去掉有限项, 不会改变级数的收敛性. (A) A. $\checkmark$ B. $\times$

3. 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. (B) A. $\checkmark$ B. $\times$

作业 19

一、单选题

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2+1} \cdot x^n$ 的收敛半径为 (B).

- A. $R = 0$ B. $R = \frac{1}{2}$ C. $R = 2$ D. $R = +\infty$

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x = -2$ 处发散, 则此级数在 $x = 4$ 处 (C).

- A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 收敛性不能确定

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+3)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 则此级数在 $x = 4$ 处 (D).

- A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 收敛性不能确定

4. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛区间为 (C).

- A. $(-5, 5)$ B. $(-1, 1)$ C. $(4, 6)$ D. $(-\infty, +\infty)$

二、判断题

1. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 $R (R > 0)$, 则其和函数 $S(x)$ 在区间 $(-R, R)$ 内连续. (A)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1} (-1 < x < 1)$ 的和函数的导函数是奇函数. (B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ 的和函数 $S(x)$, 则有 $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^{n-1}$. (B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

作业 20

一、单选题

1. 函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 展开的傅里叶级数在 $x = 2\pi$ 点收敛于 (B).

- A. $-\frac{\pi}{2}$ B. 0 C. $\frac{\pi}{4}$ D. $-\frac{\pi}{4}$

2. 函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0 \\ 2x^2 + 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 展开的傅里叶级数在 $x = -\frac{\pi}{2}$ 点收敛于 (C).

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $-\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{1-\pi}{2}$

3. 函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, $f(x) = e^x - 2, -\pi \leq x < \pi$, 展开的傅里叶级数在 $x = \pi$ 点收敛于 (D).

- A. -1 B. 0 C. $e^\pi - 2$ D. $\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} - 2$

二、判断题

1. 函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -\pi \leq x < 0 \\ 2x+1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 可以展开成余弦级数. (B)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

2. 函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, $f(x) = x, -\pi \leq x < \pi$, 可以展开成正弦级数. (A)

- A. $\checkmark$ B. $\times$

三、计算题

1. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 展开成 x 的幂级数, 并指出收敛区间.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$$

$\left\{ \begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ -2 < x < 2 \end{array} \right. \Rightarrow -1 < x < 1$

2. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x+2$ 的幂级数, 并指出收敛区间.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{1}{(x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x+2-6} - \frac{1}{x+2-1} \right)$$

$$= -\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+2}{6}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-(x+2)}$$

$$= -\frac{1}{30} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x+2}{6}\right)^n + \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} (x+2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{6^{n+1}}\right) (x+2)^n$$

$$\because -1 < \frac{x+2}{6} < 1 \quad \text{收敛区间}$$

$$-1 < x+2 < 1 \quad \Rightarrow -3 < x < -1$$