作业一答案：

1． $z=-1+2i=\sqrt{5}[\cos(\pi-\arctan 2)+i\sin(\pi-\arctan 2)]=\sqrt{5}e^{i(\pi-\arctan 2)}$

$$z^6=125[\cos(6\pi-6\arctan 2)+i\sin(6\pi-6\arctan 2)]$$
$$=125[\cos 6\arctan 2-i\sin 6\arctan 2]$$

2． $z=(-1-i)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}(\cos\dfrac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3})$，$k=0,1,2$

$\sqrt[6]{2}e^{-\frac{3}{12}\pi i}$，$\sqrt[6]{2}e^{\frac{5}{12}\pi i}$，$\sqrt[6]{2}e^{\frac{13}{12}\pi i}$

3． $\sqrt[4]{-8}=\sqrt[4]{8}(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4}),\ k=0,1,2,3$

$\sqrt[4]{8}e^{\frac{1}{4}\pi i}$，$\sqrt[4]{8}e^{\frac{3}{4}\pi i}$，$\sqrt[4]{8}e^{\frac{5}{4}\pi i}$，$\sqrt[4]{8}e^{\frac{7}{4}\pi i}$

4．沿 $y=kx$ 路径，$\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-yi}{x+yi}=\dfrac{1-ki}{1+ki}$，因此极限不存在

作业二答案：

1．$f(z)=xy^2+x^2yi$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2,\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy,\dfrac{\partial v}{\partial x}=2xy,\dfrac{\partial v}{\partial y}=x^2$ 由 C-R 方程可知 $f(z)$ 在 $z=0$ 点可导，在复平面上处处不解析.

2． $Ln(-2+i)=\ln\sqrt{5}+i(\arctan(-\dfrac{1}{2})+\pi+2k\pi)$

3． $(1+i\sqrt{3})^i=e^{iLn(1+\sqrt{3}i)}=e^{i(\ln 2+\frac{\pi}{3}i+2k\pi i)}=e^{-\frac{\pi}{3}-2k\pi}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2)$，$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

4． $\arg f(z)=\arctan\dfrac{v}{u}=c$，即 $\dfrac{v}{u}=\tan c=k$，$v=ku$，对 x,y 分别求偏导得

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=k\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}=k\dfrac{\partial u}{\partial y}$，由 C-R 方程有 $\dfrac{\partial v}{\partial x}-k\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}+k\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$，因此 $f(z)=c$

作业三答案：

1． $\sin i-i\cos i=-\dfrac{i}{e}$

2．0（此题解法很多只提供常规解法）

设 c_1,c_2 为区域 $|z|<\dfrac{3}{2}$ 内分别包含 $i,-i$ 的互不相交的闭曲线

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = \oint_{c_1} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz + \oint_{c_2} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$$

$$= \oint_{c_1} \frac{\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}}{z-i}dz + \oint_{c_2} \frac{\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}}{z+i}dz$$

$$= 2\pi i(\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}\Big|_{z=i} + \frac{1}{(z-i)(z^2+4)}\Big|_{z=-i}) = 0$$

3. $\frac{\pi}{5}$

作业四答案：

1. $\frac{\pi}{2e}$
2. $\frac{2\pi i}{9!}\cos i$
3. $f(z) = (1-\frac{i}{2})z^2 + \frac{i}{2}$

用偏积分法：$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + x$，由 $f(z) = u + iv$ 为解析函数有 $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$

$$v = \int (2x+y)dy = 2xy + \frac{1}{2}y^2 + g(x)$$

又 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x$，即 $g'(x) = -x$， $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C$

$v = 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$， $f(z) = x^2 - y^2 + xy + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C)$

将 $f(i) = -1 + i$ 代入上式得 $C = \frac{1}{2}$， $f(z) = (1-\frac{i}{2})z^2 + \frac{i}{2}$

作业五答案：

1. $R = 0$； $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z-2+2} - \frac{1}{z-2+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} - \frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$

$$= \cdots - \frac{1}{(z-2)^3} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} - \frac{z-2}{4} + \frac{(z-2)^2}{8} - \frac{(z-2)^3}{16} + \cdots$$

3. 当 $0 < |z-1| < 3$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}==\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{3}[1-\frac{z-1}{3}+(\frac{z-1}{3})^2-(\frac{z-1}{3})^3+\cdots]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^{n-1}$$

当 $3<|z-1|<+\infty$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}==\frac{1}{(z-1)^2}\cdot[1-\frac{3}{z-1}+(\frac{3}{z-1})^2-(\frac{3}{z-1})^3+\cdots]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(z-1)^{n+2}}$$

作业六答案：

1.（1） $z=0$，一级极点； $z=\pm i$，二级极点；（2） $z=0$，二级极点；

（3） $z=0$，三级极点； （4） $z=0$，可去奇点；

2.（1） $\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=-\frac{1}{2}$， $\mathrm{Re}\,s[f(z),2]=\frac{3}{2}$；

（2） $\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=-\frac{4}{3}$；

（3） $\mathrm{Re}\,s[f(z),i]=-\frac{3}{8}i$， $\mathrm{Re}\,s[f(z),-i]=\frac{3}{8}i$

3.（1） $\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=-\frac{e-e^{-1}}{2}$

方法一：提示： $\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=-\mathrm{Re}\,s[\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2},0]$

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2}=(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots)(1+z^2+z^4+z^6+\cdots)\qquad 0<|z|<1$$

z^{-1} 次幂的系数为 $a_{-1}=1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ （1）； $e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots$ （2）；

（1）-（2）得 $\frac{e-e^{-1}}{2}=1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots$

方法二： $\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=-\mathrm{Re}\,s[f(z),1]-\mathrm{Re}\,s[f(z),-1]$

$$=-[\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)+\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)]=-\frac{e-e^{-1}}{2}$$

（2）$\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=-\mathrm{Re}\,s[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]=-\mathrm{Re}\,s[\frac{z^4}{(1+z)^4(1-4z)},0]=0$

作业七答案：

1．除∞外，被积函数的奇点为$\pm i, z_k=\sqrt[4]{2}e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}(k=0,1,2,3)$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),i]+\mathrm{Re}\,s[f(z),-i]+\sum_{i=0}^{3}\mathrm{Re}\,s[f(z),z_k]+\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=0$$

除∞外，奇点都在 C 的内部，

$$\oint_C \frac{z^{15}}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^4+2\right)^3}dz=-2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{z(1+2z^4)^3(1+z^2)^2},0]=2\pi i$$

2．除∞外，被积函数的奇点为$0,-1,4$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0]+\mathrm{Re}\,s[f(z),-1]+\mathrm{Re}\,s[f(z),4]\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=0$$

由于i在 C 的内部，

$$\oint_C \frac{1}{z(z+1)^4\left(z-4\right)}dz=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),0]+2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),-1]$$

$$=-2\pi i(\mathrm{Re}\,s[f(z),4]+\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty])$$

$$=-2\pi i[\frac{1}{4\cdot 5^4}-\mathrm{Re}\,s[\frac{z^4}{(1+z)^4(1-4z)},0]]=-\frac{\pi i}{2\cdot 5^4}$$

3．由于被积函数在$|z|=2$内部有一级极点$z=0$和$z=-1$.

$$\int_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz=-2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{e^z}{z^4(1+z)},0]=2\pi i\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{e^z(1+z)(1+z^2)-3e^z(1+z^2)}{(z+1)^6}=-\frac{2\pi i}{3}$$

作业八答案：

1． $F(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-(\beta+i\omega)t}dt=\frac{1}{\beta+i\omega}=\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}$

$$f(t)=F[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega(t\neq 0)$$

当$t=0$时，积分为 1/2

2． $F(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega_0 te^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}(e^{-i\omega_0 t}+e^{i\omega_0 t})e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-i(\omega_0+\omega)t}+e^{i(\omega_0-\omega)t})dt$$

$$=\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$$

作业九答案：

1． $f(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin 2te^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{2j}e^{-j\omega t}dt$

$$=\frac{1}{4j}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-j(\omega-2)t}-e^{-j(\omega+2)t})dt=\frac{2\pi}{4j}(\delta(\omega-2)-\delta(\omega+2))$$

$$=\frac{\pi j}{2}(\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2))$$

2． $F[tf(t)]=j\frac{dF(\omega)}{d\omega}=\frac{1}{(\beta+j\omega)^2}$； $F[t^2f(t)]=j^2\frac{d^2F(\omega)}{d\omega^2}=\frac{2}{(\beta+j\omega)^3}$

作业十答案：

1． $L[t^2\sin t]=\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s^2+1})=\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$

2． $L[t\cos^2 t]=\frac{1}{2}L[t+t\cos 2t]=\frac{1}{2}(\frac{1}{s^2}-\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+4}))=\frac{1}{2}(\frac{1}{s^2}-\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2})$

3． $L[t^3e^{2t}]=-\frac{d^3}{ds^3}(\frac{1}{s-2})=\frac{3!}{(s-2)^4}$

4. $$f(t)=L^{-1}F(s)=\frac{-\frac{1}{6}}{s+1}+\frac{\frac{1}{15}}{s-2}+\frac{\frac{1}{10}}{s+3}=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{15}e^{2t}+\frac{1}{10}e^{-3t}$$